Математика 11 класс

Объявление. В 2019-20 учебном году мы в несколько большем объеме, чем раньше, включили в перечень тем для 11 класса элементы языка теории множеств, а также первые сведения о комплексных числах. Более подробно об этих темах и посвященной им учебной литературе можно узнать на странице `http://math.hse.ru/podgotovka`.

(Тур длится 240 минут. Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
20	1.	Про числа a, b и c известно, что $abc+a+b+c=10$, $ab+bc+ac=9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите что других нет.)
20	2.	Дано множество A из 30 элементов и отображение $f\colon A \to A$. Сколько элементов может быть в образе $f(A)$, если в образе $f(f(A))$ ровно 10 элементов?
26	3.	Мистер A час простоял в точке с координатами $(0,0)$. За этот же час, двигаясь равномерно и прямолинейно, мистер B дошел от точки $(22,0)$ до точки $(2,20)$. За этот же час мадемуазель C, тоже двигавшаяся равномерно и прямолинейно, прошла от точки $(30,4)$ до точки $(0,24)$. Сколько раз за указанный период наблюдения принимала целые значения площадь треугольника ABC? Начальный и конечный момент включаются.
26	4.	Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по целым сторонам. Дыр внутри многоугольника быть не должно. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник?
27	5.	Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые a, b, c соответсвенно, не параллельные сторонам треугольника. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины сторон BC, CA, AB; A_1, B_1, C_1 — точки пересечения a и B_0C_0, b и C_0A_0, c и A_0B_0. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.
28	6.	В множестве из 2019 элементов Холмс нашел все подмножества, у которых число элементов делится на три (включая пустое и само исходное множество), а Ватсон — все подмножества, у которых число элементов при делении на три дает остаток 1. У кого получилось больше и на сколько? Укажите ответ в виде числа в десятичной записи.
	7.	Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1)=2016$, $f(2017)=0$.
22	а)	Что больше, $f(2015)$ или $f(2016)$?
23	б)	Что больше, $f(1008)$ или $f(1009)$?

Ответы, указания, решения.

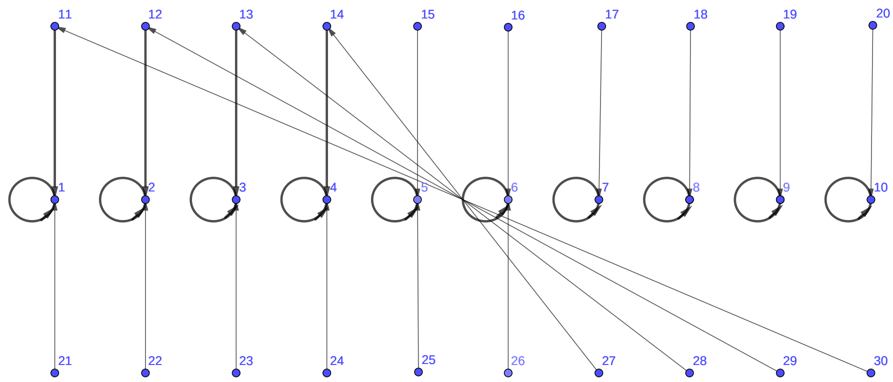
1. **Первое Решение.** Обозначим $a+b+c=\lambda$. Теорема Виета позволяет написать кубическое уравнение, зависящее от параметра λ, корнями которого является набор a, b, c, соответствующий данному λ. А именно (переменная обозначена через t ибо x уже занято):

$$t^3-\lambda t^2+9t-(10-\lambda)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t^2-(\lambda-1)t+(10-\lambda))=0.$$

Отсюда уже видно, при любом λ есть корень $t=1$, то есть значение $x=1$ подходит. Осталось доказать, что нет других значений, являющихся корнями при любом λ (хотя это и так очевидно). В самом деле, $t^2-(\lambda-1)t+(10-\lambda)=0$ означает $t=\frac{\lambda-1\pm\sqrt{\lambda^2+2\lambda-39}}{2}$. Возьмем любую пару значений λ, при которой дискриминант принимает одно и то же положительное значение, например при $\lambda=10$ и $\lambda=-12$ имеем $t\in\{0,9\}$ и $t\in\{-11,-2\}$ – пересечений нет. Итак, ответ $x=1$.

Второе решение. Вычтем из первого равенства второе, преобразовав, получим $(a-1)(b-1)(c-1)=0$. Отсюда следует, что одно из a, b, c равно единице. Другие x не подходят, так как тройки $(a,b,c)=(4,1,1)$ и $(a,b,c)=(0,9,1)$ удовлетворяют условию.

2. **Ответ**: не меньше 10 и не больше 20.



Решение. Докажем, что $10\le|f(A)|\le 20$. Изобразим элементы множества A точками на плоскости и пронумеруем их числами от 1 до 30. Из каждой точки x нашего множества нарисуем стрелку в точку $f(x)$. Один из возможных примеров показан на рисунке. Тогда $f(A)$ – это множество тех точек, в которые ведёт хотя бы одна стрелка. Выделим жирным все стрелки, начало которых лежит в множестве $f(A)$ (конец, разумеется, тоже будет лежать в этом множестве). Тогда $f(f(A))$ — это множество тех точек, в которые ведет хотя бы одна жирная стрелка. Всего жирных стрелок: $|f(A)|$, а тонких (то есть не жирных): $|A|-|f(A)|$.

Мы видим, что $|f(A)|\ge 10$, так как количество жирных стрелок, равное $|f(A)|$, не меньше количества их концов, равного $|f(f(A))|=10$.

Докажем теперь, что $|f(A)|\le 20$. Рассмотрим точки, являющиеся началами жирных стрелок, но не являющиеся их концами. С одной стороны, таких точек $|f(A)|-|f(f(A)|$ (из общего количества точек, являющихся началами жирных стрелок, нужно вычесть количество точек, являющихся также концами жирных стрелок). С другой стороны, каждая такая точка является концом по крайней мере одной тонкой стрелки, поэтому таких точек не больше, чем всего тонких стрелок. Таким образом, $|f(A)| - |f(f(A))| \le |A| - |f(A)|$, откуда

$$|f(A)| \le \frac{|A| + |f(f(A))|}{2} = 20.$$

Остаётся показать, что $|f(A)|$ может принимать все значения от 10 до 20 включительно. Для каждого $k \in \{0, \dots, 10\}$ построим отображение $f : A \to A$, удовлетворяющее условию задачи, и такое что $|f(A)| = 10+k$. Примером такого отображения будет

$$f(i) = \begin{cases} (i-1) \pmod{10} + 1 & \text{для } i \in \{1, \dots, 30-k\} \\ 41 - i & \text{для } i \in \{31-k, \dots, 30\}, \end{cases}$$

где $n \pmod{10}$ обозначает остаток от деления целого числа n на 10. На картинке приведён пример такого отображения для $k = 4$.

Другая запись того же решения (на языке отображений). Заметим, что $f(A) \subseteq A$, а значит, $f(f(A)) \subseteq f(A)$. Следовательно, $|f(f(A))| \le |f(A)|$, откуда заключаем, что $|f(A)| \ge 10$.

Докажем теперь, что $|f(A)| \le 20$. Для этого сначала покажем, что $f(A) \setminus f(f(A)) \subseteq f(A \setminus f(A))$. Пусть $y \in f(A) \setminus f(f(A))$. Тогда существует $x \in A$, такой что $f(x) = y$. Заметим, что $x \notin f(A)$, так как $f(x) = y \notin f(f(A))$. Получаем, что $x \in A \setminus f(A)$, откуда следует, что $f(x) = y \in f(A \setminus f(A))$. Следовательно, $|f(A) \setminus f(f(A))| \le |f(A \setminus f(A))| \le |A \setminus f(A)|$. Значит, $|f(A)| - |f(f(A))| \le |A| - |f(A)|$, откуда $|f(A)| \le (|A| + |f(f(A))|)/2 = 20$.

3. **Ответ:** 53.

Решение. Неформально говоря, проблема в этой задаче не в том, чтобы найти путь вычислений, приводящий к ответу; а в том, чтобы найти путь к ответу, проходящий через не слишком большое количество промежуточных вычислений. Покажем, как это сделать.

Как известно, площадь треугольника, образованного векторами $\overrightarrow{(x_1, y_1)}$ и $\overrightarrow{(x_2, y_2)}$ равна $|\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)|$. Если точка $\overrightarrow{(x, y)}$ движется равномерно и прямолинейно, то ее координаты зависят от времени t как $x = x_0 + x't$, $y = y_0 + y't$. Тогда величина $f(t) = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ как функция от t является многочленом второй степени. Выберем ось времени так, чтобы ноль был в середине отрезка наблюдения, а начальный и конечный моменты имели координаты -1 и 1 соответственно. Обозначим $f(t) = ax^2 + bx + c$. Координаты точек B и C в середине отрезка наблюдения легко считаются, это $(12, 10)$ и $(15, 14)$ соответственно. Итак, $f(-1) = \frac{1}{2}(22 \cdot 4 - 30 \cdot 0) = 44$, $f(0) = \frac{1}{2}(12 \cdot 14 - 15 \cdot 10) = 9$, $f(1) = \frac{1}{2}(2 \cdot 24 - 0 \cdot 20) = 24$. Откуда $c = f(0) = 9$, $b = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = -10$, $a = \frac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2} = 25$. Минимум квадратного трехчлена достигается в точке $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{5}$; $f(\frac{1}{5}) = 8$. Итак, мы видим, что минимум выражения $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ попал на отрезок наблюдения, кроме того он положителен, то есть модуль равен выражению под модулем. Итого, искомая площадь сначала уменьшалась от 44 до 8, потом росла от 8 до 24, таким образом принимая целые значения $1 + (44 - 8) + (24 - 8) = 53$ раза.

4. **Ответ:** $2n + 6$ при $n \geqslant 2$, и 6 при $n = 1$.

Решение. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника – она является концом для двух или для трех сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы по $120°$.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трех сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки

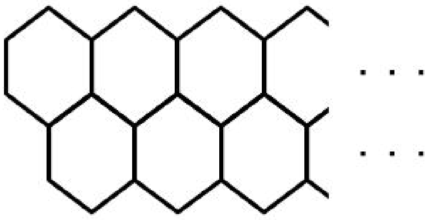


Рис. 1. Пример многоугольника, сделанного из шестиугольников.

до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами – которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками.

Таким образом, мы получили изображение *мультиграфа* на плоскости. Для него верна *формула Эйлера* $F-E+V=2$, где F, E, V – количество граней, ребер и вершин соответственно. Поскольку все вершины имеют степень 3, $3V=2E$. Кроме того $F=n+1$, поскольку это все шестиугольники и внешняя грань. Из этих трех уравнений выводится $E=3n-3$. Пройдем по внешнему циклу. При этом мы шли по всем n шестиугольникам, значит при $n>1$ не менее чем n раз меняли шестиугольник, по которому идем (внимание: этот утверждение не верно если $n=1$: так и ходили по одному шестиугольнику, ни разу его не поменяв). Значит, во внешнем цикле не менее n ребер, значит в остальном графе не больше $2n-3$ ребер. Каждое из них состоит ровно из одного отрезка, бывшего стороной для двух шестиугольников, поскольку внутри многоугольника не может быть точек, являющихся концами ровно для двух отрезков сторон. Значит, внутри не больше $4n-6$ сторон шестиугольников, склеенных по парам, значит на границе лежит не менее $2n+6$ сторон.

Пример, работающий при $n\geq 2$ см. рис. 1.

5. **Решение** *(на языке тригонометрии).* Достаточно доказать, что

$$\frac{B_0A_1}{C_0A_1}\cdot\frac{C_0B_1}{A_0B_1}\cdot\frac{A_0C_1}{B_0C_1}=1.$$

Тогда по теореме Чевы прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Пусть без ограничения общности прямая a пересекает внутренность треугольника ABC. Обозначим углы треугольника через α, β, γ, а угол B_0AA_1 через ϕ. Тогда углы AC_0A_1 и AB_0A_1 равны β и γ соответственно.

Применяя теорему синусов к треугольникам AB_0A_1 и AC_0A_1, получаем

$$\frac{B_0A_1}{C_0A_1}=\frac{\sin A_1AB_0}{\sin A_1AC_0}\cdot\frac{\sin AC_0A_1}{\sin AB_0A_1}=\frac{\sin\phi}{\sin(\alpha-\phi)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Аналогично, пользуясь равенством вертикальных углов, получаем

$$\frac{C_0B_1}{A_0B_1}=\frac{\sin B_1BC_0}{\sin B_1BA_0}\cdot\frac{\sin BA_0B_1}{\sin BC_0B_1}=\frac{\sin(\alpha-\phi)}{\sin(\alpha+\beta-\phi)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Аналогично

$$\frac{A_0C_1}{B_0C_1}=\frac{\sin(\gamma+\phi)}{\sin\phi}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Т.к. $\alpha+\beta-\phi=\pi-(\gamma+\phi)$, то при перемножении трех выписанных равенств все члены сократятся и мы получим 1.

Другая запись того же решения *(на языке проективной геометрии). Простым отношением* трех точек P, Q, R на одной прямой назовем такое число x, что $\overrightarrow{PQ}=x\cdot\overrightarrow{PR}$. Обозначим $x=\overrightarrow{PQ}/\overrightarrow{PR}$.

Достаточно доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{C_0A_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{A_0B_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{B_0C_1}} = -1.$$

Тогда по теореме Чевы прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Двойным отношением прямых p, q, r, s назовем число $(p, q; r, s) = \pm\frac{\sin\angle(p,r)}{\sin\angle(p,s)} \cdot \frac{\sin\angle(q,r)}{\sin\angle(q,s)}$, где знак "+" берется, если r и s расположены в одной паре вертикальных углов относительно p и q, а знак "−" — иначе. Проведем через вершины треугольника A, B, C прямые p, q, r, параллельные противоположным сторонам a', b', c' треугольника ABC. Тогда, как известно, $\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{C_0A_1}}$ равно двойному отношению прямых $(a, p; c', b')$. Аналогично $\frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{A_0B_1}}$ и $\frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{B_0C_1}}$ равны двойным отношениям $(b, q; a', c')$ и $(c, r; b', a')$. Но из параллельности

$$(a, p; c', b') = (a, a'; c', b'), (b, q; a', c') = (a, b'; a', c'), (c, r; b', a') = (a, c'; b', a').$$

Остается доказать, что

$$(a, a'; c', b')(a, b'; a', c')(a, c'; b', a') = -1.$$

Здесь участвуют двойные отношения одной и той же четверки прямых, но взятых в разных порядках. Обозначим $x = (a, a'; c', b')$. Известно, что при перестановке прямых c' и b' двойное отношение заменяется на $1/x$, а при перестановке прямых a' и b' — на $1 - x$. Значит, $(a, b'; a', c') = 1/(1 - x)$ и $(a, c'; b', a') = 1/(1 - 1/(1 - x))$. Получаем

$$(a, a'; c', b')(a, b'; a', c')(a, c'; b', a') = x \cdot 1/(1 - x) \cdot 1/(1 - 1/(1 - x)) = -1,$$

что и требовалось.

6. **Ответ:** у Ватсона на 1 больше.

Решение:

Холмс нашёл все подмножества исходного множества, число элементов в которых равно $3k$, где $k \in \{0, \ldots, 673\}$, а Ватсон нашёл все подмножества, число элементов в которых равно $3k + 1$, где $k \in \{0, \ldots, 672\}$. Поскольку число подмножеств исходного множества, состоящих из m элементов, равно C_{2019}^m, мы заключаем, что Холмс нашёл

$$\sum_{k=0}^{673} C_{2019}^{3k}$$

подмножеств, а Ватсон нашёл

$$\sum_{k=0}^{672} C_{2019}^{3k+1}$$

подмножеств. Введём обозначения:

$$X = \sum_{k=0}^{673} C_{2019}^{3k}, \qquad Y = \sum_{k=0}^{672} C_{2019}^{3k+1}, \qquad Z = \sum_{k=0}^{672} C_{2019}^{3k+2}.$$

Заметим, что в силу симметрии биномиальных коэффициентов, имеем

$$Y = \sum_{k=0}^{672} C_{2019}^{3k+1} = \sum_{k=0}^{672} C_{2019}^{2019-(3k+1)} = \sum_{\ell=0}^{672} C_{2019}^{3\ell+2} = Z,$$

где $\ell = 672 - k$.

Чтобы получить ещё одно соотношение на X, Y и Z, воспользуемся комплексными числами. Пусть $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ – корень третьей степени из 1. Тогда $w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $w^3 = 1$. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(1+w)^{2019} = \sum_{n=0}^{2019} w^n C_{2019}^n = X + wY + w^2 Z.$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $w^{3k+1} = w$ и $w^{3k+2} = w^2$ для любых целых k. С другой стороны, по формуле Муавра,

$$(1+w)^{2019} = (1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2019} = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2019} = (\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))^{2019} =$$

$$= \cos\big(\frac{2019\pi}{3}\big) + i\sin\big(\frac{2019\pi}{3}\big) = \cos(673\pi) + i\sin(673\pi) = -1.$$

Таким образом, получаем второе соотношение на X, Y и Z:

$$X + wY + w^2 Z = -1.$$

Заменяя Z в этом уравнении на Y, получаем $X + (w + w^2)Y = -1$. Заметим, что

$$w + w^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1,$$

откуда $X - Y = -1$, то есть $Y - X = 1$. Таким образом, Ватсон нашёл на одно подмножество больше, чем Холмс.

7. **Ответ:**

a) $f(2015) > f(2016)$.

b) $f(1009) > f(1008)$.

Решение. Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n.

Введём операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример:

$$t = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 12 & 3 & 17 \\ 2015 & 17 & 1 & 8 \\ 100 & 2 & 101 & 56 \\ 101 & 4 & 6 & 12 \end{array}} \qquad g(t) = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 12 & 3 \\ 2015 & 17 & 1 \\ 100 & 2 & 101 \end{array}}.$$

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

a) Мы докажем, что отображение $g: \ S_{2016} \to S_{2015}$ является инъективным (смысл термина будет разъяснён далее), и при этом его образ не покрывает всего множества S_{2015}. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_{2015}$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{2016}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы следующим образом:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline & a_1 \\ & a_2 \\ & a_3 \\ \Large y & \vdots \\ & \vdots \\ & a_{2015} \\ \hline b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \cdots\ \ \cdots\ \ b_{2015} & c \\ \hline \end{array}$$

Т.е. пусть последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_{2015}, c$, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_{2015}, c$.

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 2015 различных чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots 2016\}$, т.е. для a_i остаётся единственное возможное значение. Следовательно все числа $a_1, \ldots, a_{2015}$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \ldots, a_{2015}$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и следовательно таблицы x, удовлетворяющей равнеству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны, и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось. □

Следствие: если $x_1,\ x_2 \in S_{2016}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным*).

Утверждение 2. *Существует таблица* $y \in S_{2015}$ *такая, что* $\forall x \in S_{2016}:\ \ g(x) \neq y$.

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_{2015}$, в первой строке которой написаны подряд числа $1, 2, \ldots, 2015$, а в следующих строках — те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1:

$$y = \begin{array}{|ccccccc|} \hline 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 2015 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 2015 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \hline \end{array}.$$

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2015} = 2016$, что противоречит условию. Следовательно искомой таблицы x не существует. □

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_{2015} больше элементов, чем в S_{2016}, т.е. $f(2015) > f(2016)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \ldots, x_K$ из множества S_{2016}. Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_K & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \ldots & g(x_K) & y \end{array}$$

В множестве S_{2016} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y. Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_{2015}, и все они по доказанному различны. Следовательно количество таблиц в множестве S_{2015} больше, чем в S_{2016}.

б) Докажем, что при отображении $g: S_{1009} \to S_{1008}$ в каждую таблицу множества S_{1008} отображается более одной таблицы множества S_{1009}. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. *Пусть дана таблица $y \in S_{1008}$. Тогда существует не менее 1007 различных таблиц $x \in S_{1009}$ таких, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline \qquad y \qquad & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1008} \end{matrix} \\ \hline b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \cdots\ \ \cdots\ \ b_{1008} & c \\ \hline \end{array}$$

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_{1008}$ построить не менее 1007 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 2015 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \ldots, 2016\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Т.е. согласно нашему выбору $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \ldots 1008$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, т.к. "запрещёнными" оказываются всегда не более $1008 + 1007 = 2015$ чисел.

Аналогично для $j = 2, 3, \ldots 1008$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел $a_i, b_j,\ i, j = 1 \ldots 1008$, не более 2015 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех, и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_{1009}, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещёнными были не более 1009 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 1007 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 1007, что и требовалось доказать. $\square$