Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

11-1 От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

Решение. Двое выбирают одну из 6 дорог случайно, равновероятно и независимо, поэтому вероятность выборы заданной упорядоченной пары дорог равна 1/36. Возможные расстояние через час равны 0, 5км, $5\sqrt{3}$км и 10км соответственно для выбора одной дороги, двух соседних, двух, расходящихся под углом 120° и противоположных. Превышают 7 расстояния 10 и $5\sqrt{3}$ ($5\sqrt{3} > 5\sqrt{2.25} = 7.5 > 7$). Расстояние 10 получается в 6 случаях, расстояние $5\sqrt{3}$ — в 12 случаях. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{6+12}{36} = \dfrac{1}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущена арифметическая ошибка, не влияющая на суть решения и ответ.	$+.$	18
Считается, что пути обязательно различны, в остальном решение верно.	$\pm$	16
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-2 Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k>0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k-1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

Решение. Докажем, что дорасставить требуемым образом фонари можно.

Разделим синие фонари на два вида — освещённые другими и нет. Пусть неосвещённые имеют координаты (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n). Все x-координаты различны, так как иначе бы какой-то из фонарей освещал бы какой-то другой. Тогда можно считать, что $x_1 < \ldots < x_n$. Тогда $y_1 > \ldots > y_n$, так как иначе бы какой-то из этих фонарей освещал бы какой-то другой.

Расставим красные фонари в точки $(x_1, y_2), (x_2, y_3), \ldots, (x_{n-1}, y_n)$, а также во все точки, где стоят освещённые другими синими фонарями синие фонари.

Рассмотрим производную точку плоскости. Если она не освещалась ни одним синим фонарём, то не будет освещаться ни одним красным. Если она освещается хотя бы одним синим, то освещается хотя бы одним синим, который не освещается другими синими. Тогда для выбранной точки

- количество синих, освещённых другими синими и освещающих данную точку, сохранится;
- количество синих, не освещённых другими синими и освещающих данную точку, уменьшится на 1.

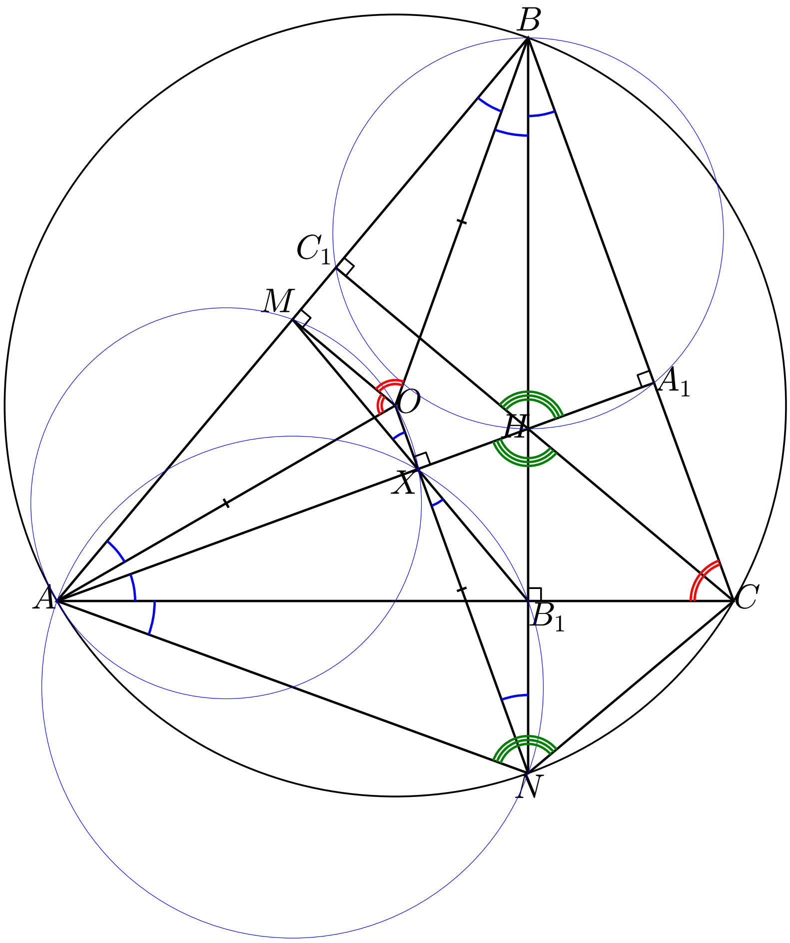
Таким образом, найденная нами расстановка является требуемой. *На самом деле данная расстановка является единственной.*

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности.	$+.$	19
Приведён правильный алгоритм расстановки, но не доказано, почему он работает.	$\pm$	17
Присутствует идея деления синих на освещённые и нет.	$\mp$	3
Рассмотрено несколько (>1) частных случаев, для которых решение построено.	$-.$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-3 Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку дано равенство углов $\angle OBN = \angle NBC$, имеет место один из двух случаев:

- они равны как ориентированные углы, то есть N и C по разные стороны от OB,
- они противоположны как ориентированные углы, то есть N и C по одну сторону от OB. Тогда O лежит на BC, откуда угол $\angle A$ прямой. В этом случае $A = B' = N$, и пересечение прямых AA', MB', ON тривиально. Далее этот случай мы рассматривать не будем.



Имеем $\angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = \angle CBN = \angle NBO =: \alpha$. Поскольку O — центр окружности, $\angle AOB = 2\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$, аналогично $\angle ONB = \alpha$ (равнобедренный треугольник $\triangle OBN$). Как легко убедиться, H и N симметричны относительно AC ($HN \perp AC$ и $\angle ANC = 180^\circ - \angle B = \angle A_1HC_1 = \angle AHC$, так как BA_1HC_1 вписанный), так что $\angle CAN = \alpha$. Обозначим через X точку пересечения ON и AA_1. Докажем, что через неё проходит также и MB_1. Поскольку $\angle XAB_1 = \angle XNB_1$, четырёхугольник AXB_1N вписанный, а тогда $\angle AXN$ прямой и $\angle NXB_1 = \alpha$. Поскольку $\angle AMO = \angle AXO = 90^\circ$, четырёхугольник $AMOX$ вписанный, а тогда $\angle MAO = \angle MXO = \alpha$. Это означает, что точки M, X, B_1 лежат на одной прямой.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
В доказательстве упущен нетривиальный существенный факт.	$\pm$	14
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-4 В таинственном лесу два мудреца в чёрном и белом колпаках раздают гномикам грибочки. К ним в две очереди выстроились $2n$ гномиков, n в чёрных и n в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномикам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдёт следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)

Ответ: n.

Решение. Докажем, что можно обойтись n неправильными попаданиями в очередь. Допустим, мудрецы не меняются вообще, и тогда в неправильную очередь попадает k гномиков. Если мудрецы поменялись бы колпаками в самом начале, то в неправильной очереди оказались бы в точности все остальные, то есть $2n-k$. Минимум из $2n-k$ и k не превосходит n.

Покажем, что существует изначальная расстановка, при которой получится не меньше n попаданий в неправильную очередь. Допустим, все гномики выстроились в очередь к белому мудрецу, при этом сначала все чёрные. Если белый мудрец не перенаправит всех чёрных, он будет вынужден до этого поменяться колпаками с коллегой, после чего ему придётся перенаправить всех белых, то есть в любом случае минимум n.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Допущены мелкие неточности.	+.	18
Приведён и обоснован пример, когда n переходов обязательны.	$\pm$	14
Приведён пример с неточностями в обосновании либо с неточным ответом. Или доказано, что можно за n, рассмотрены «наихудшие» случаи для n (верные, но не обоснованные).	$+/2$	7
Доказано, что можно обойтись не более чем n переходами (например, возможность поменяться сначала или не меняться вовсе).	$\mp$	4
Только ответ.	$-$	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-5 Из натурального числа n разрешается получить либо число n^2+2n, либо число n^3+3n^2+3n. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

Ответ: числа вида $2019^{2^n3^k}-1$ для неотрицательных целых k и n.

Решение. Сделаем замену $k=n+1$ и будем считать, что мы преобразуем число k, которое может принимать значения натуральных чисел, кроме единицы. Замена $n \mapsto n^2+2n$ для k соответствует замене $f_1\colon k=n+1 \mapsto n^2+2n+1=k^2$. Вторая замена соответствует $f_2\colon k \mapsto k^3$. Заметим, что для любого k верно $f_1(f_2(k))=f_2(f_1(k))$. Таким образом, если мы применяем несколько раз операции f_1 и f_2 к числу k, неважен порядок, а важно только количество операций.

Допустим, числа k_1 и k_2 эквивалентны. Тогда применением операций к одному и другому числам несколько раз можно получить одно и то же число, то есть $k_1^{2^{l_1}3^{m_1}} = k_2^{2^{l_2}3^{m_2}}$. Таким образом, все натуральные числа, эквивалентные заданному k, имеют вид $k^{2^{q_1}3^{q_2}}$ для рациональных q_1, q_2. Соответственно, для $n = 2018$ все совместимые с ним числа будут иметь вид $2019^{2^{q_1}3^{q_2}} - 1$. Число $2019 = 3 \cdot 673$ не является степенью натурального числа выше первой. Таким образом, рациональные числа q_1 и q_2 должны быть целыми, для любых целых q_1 и q_2 мы получаем совместимые с 2018.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности. Или не сказано, почему 2018 не получается с помощью данных операций из других чисел	$+.$	19
Верно указано, какие числа можно получить из 2018, но не доказано, что других совместимых нет.	$\mp$	4
Присутствует идея замены $k = n + 1$ и далее итерирования операций возведения в степень.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-6 В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно в одной из этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка *лежит внутри выпуклой оболочки* других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трёх из этих точек.)

Ответ: нет, так оказаться не могло.

Решение. Всего у нас три координаты, по каждой есть минимум и максимум, которые различны, так как проекции не лежат на одной прямой. Тогда по принципу Дирихле для некоторой из точек какие-то две координаты принимают значения минимума или максимума. Тогда проекция этой точки на любую координатную плоскость имеет как минимум одну из координат минимальной или максимальной, откуда точка не может быть внутри выпуклой оболочки других точек.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности.	$+.$	18
Доказано, что существует точка, у которой пара координат максимальна/минимальна, сказано (не обосновано), что отсюда проекция точки не может быть внутри выпуклой оболочки прочих.	$\pm$	12
Доказано, что существует точка, у которой пара координат максимальна/минимальна.	$\mp$	8
Рассмотрены комбинаторные конфигурации проекций, разобрано, какие из них подходят.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	