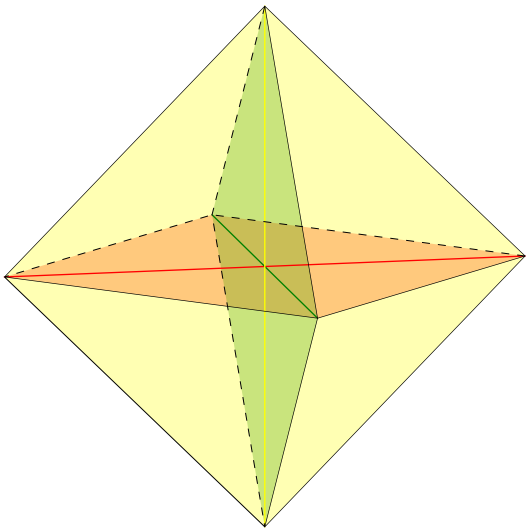
Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

11-1 В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

Решение.

Рассмотрим октаэдр (см. рисунок). Пусть каждый человек соответствует вершине октаэдра.



В качестве троек, ходивших вместе в поход, возьмём грани, а также ещё 6, получамых следующим образом. Рассмотрим три координатных плоскости. Каждая из них пересекает октаэдр по квадрату (закрашены разными цветами). В каждом таком квадрате возьмём две тройки, чтобы полученные треугольники вместе образовывали квадрат, и три прямых, разделяющих треугольники в парах, лежали на трёх различных координатных прямых. (Отрезки, разделяющие треугольники, в квадратах проведены соответствующими цветами.) Легко видеть, что такой набор троек не удовлетворяет условию задачи.

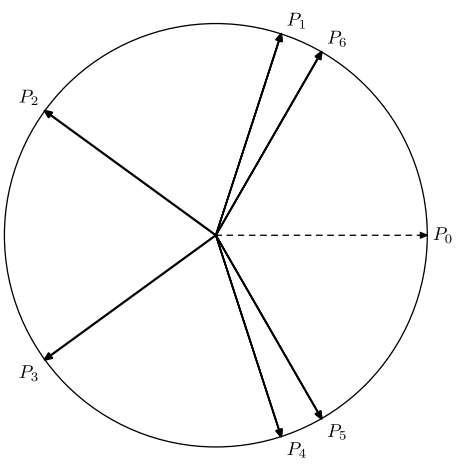
Ответ: нет.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведён верный контрпример	$+$	20
Присутствует идея построения цикла для 5 человек и добавления шестого	$\pm$	15
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-2 На окружности с центром O расположим шестёрку точек $P_1, \ldots, P_6$. Назовём шестёрку *интересной*, если $\overrightarrow{OP}_1 + \ldots + \overrightarrow{OP}_6 = 0$, и все углы $\angle P_iOP_j$ целые в градусах. Назовём шестёрку *скучной*, если она переводится в себя отражением от точки O или поворотом вокруг O на $120°$. Существуют ли интересные нескучные шестёрки точек на окружности?

Решение.

Рассмотрим точки $P_0, \ldots, P_4$ в вершинах правильного пятиугольника. Тогда имеем $\sum\limits_{i=0}^{4} \overrightarrow{OP}_i = 0$. Рассмотрим две различные точки P_5 и P_6, такие что $\angle P_0OP_5 = \angle P_0OP_6 = 60°$. Тогда $\overrightarrow{OP}_5 + \overrightarrow{OP}_6 = \overrightarrow{OP}_0$, отсюда $\sum\limits_{i=1}^{6} \overrightarrow{OP}_i = 0$. Углы между соседними векторами $\overrightarrow{OP}_i$ для $i = 1, \ldots, 6$ равны $12°$, $72°$, $120°$.



Очевидно, что данная шестёрка не обладает центральной симметрией и не самосовмещается поворотом на $120°$.

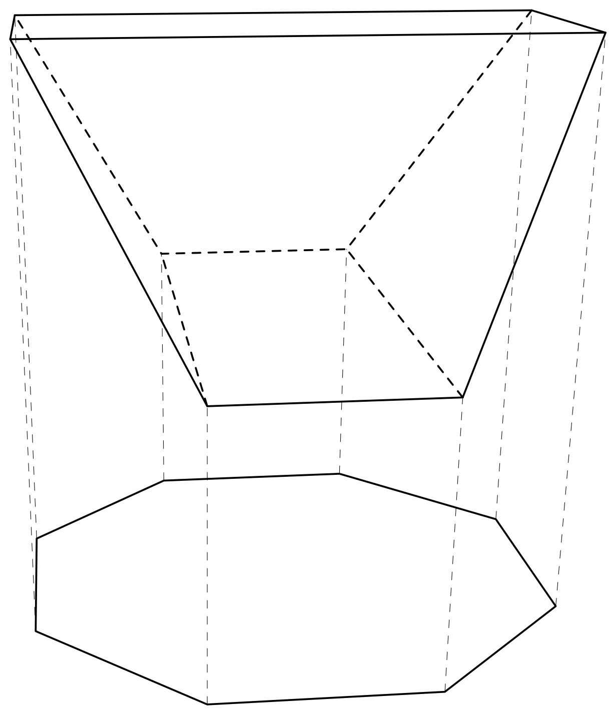
Ответ: да.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Обоснованно получен верный пример	$+$	20
Верный пример получен, но опущено обоснование	$\pm$	15
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-3 Выпуклый многогранник имеет 8 вершин и 6 четырёхугольных граней. Может ли проекция этого многогранника на некоторую плоскость оказаться правильным 8-угольником?

Решение.

Рассмотрим различные параллельные плоскости Σ_1, Σ_2, Σ_3. На плоскости Σ_1 возьмём правильный восьмиугольник $A_1 \ldots A_8$. Выберем на плоскости Σ_2 точки B_1, B_2, B_5, B_6, такие что проекция B_i на Σ_1 совпадает с A_i. Выберем на плоскости Σ_3 точки C_3, C_4, C_7, C_8, такие что проекция C_i на Σ_1 совпадает с A_i. Тогда многогранник с вершинами в B_1, B_2, C_3, C_4, B_5, B_6, C_7, C_8 искомый.



Четвёрка точек B_2, C_3, C_4, B_5 лежит в одной плоскости, так как $C_3C_4 \parallel B_2B_5$. Для остальных четвёрок точек, соответствующих граням, проверяется аналогично.

Ответ: да.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	$+$	20
Не доказано, как обеспечить, чтобы четвёрки, относящиеся к одной грани, лежали в одной плоскости	$\pm$	12
Приведён комбинаторный тип построения, не учитывающий, что восьмиугольник правильный (или просто иллюстрация), компланарность четвёрок точек не обоснована	$\mp$	8
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-4 Тройка целых чисел (x, y, z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

Решение.

Число z единственным образом раскладывает в произведение простых: $z = \pm p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$. Возьмём любое простое число p и докажем, что степень его вхождения в z делится на 3. Понятно, что из этого следует, что z является кубом целого числа.

Пусть $\nu_p(n)$ равно k, если n делится на p^k и не делится на p^{k+1} (будем считать, что $\nu_p(0) = \infty$). Сгруппируем слагаемые:

$$x^3 + z(x^2 - y^2) = z^2(2x + y).$$

Понятно, что если z делится на p, то и x делится на p, но тогда y не делится на p, так как наибольший делитель x, y, z равен 1.

Рассмотрим остаток от деления $\nu_p(z)$ на 3.

Допустим, остаток равен 1, то есть $\nu_p(z) = 3k+1$. Тогда z^2 делится на p^{6k+2}, а степень p, на которую делится x^3, делится на 3. Таким образом, два слагаемых в левой части и правая часть делятся на попарно разные степени p, так как остатки этих степеней по модулю 3 различны (так как $x^2 - y^2$ и $2x + y$ не делятся на p). Тогда равенство не может быть выполнено. В случае $\nu_p(z) \equiv 2 \mod (3)$ аналогично равенство не может быть выполнено. Значит, остаётся только случай, где $\nu_p(z)$ делится на 3.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Рассмотрена идея рассмотрения остатка вхождения произвольного простого по модулю 3, но не показано, почему в этом случае равенство невозможно	$\pm$	12
Рассмотрена идея разложения z на простые множители и исследования степеней простых	$-.$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-5 Числа $P_1, \ldots, P_n$ являются перестановкой набора чисел $\{1, \ldots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из $1, \ldots, n$, и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

Решение.

По неравенству о среднем арифметическом и среднем гармоническом имеем

$$\frac{1}{n_1} + \ldots + \frac{1}{n_k} \geqslant \frac{k^2}{n_1 + \ldots + n_k}.$$

В нашем случае слагаемых $k = n-1$. Сумма в знаменателе содержит каждое из чисел $1, \ldots, n$ по два раза, кроме двух чисел, которые в ней участвуют по одному разу. Тогда эта сумма меньше $2(2+\ldots+n)=(n-1)(n+2)$. Отсюда

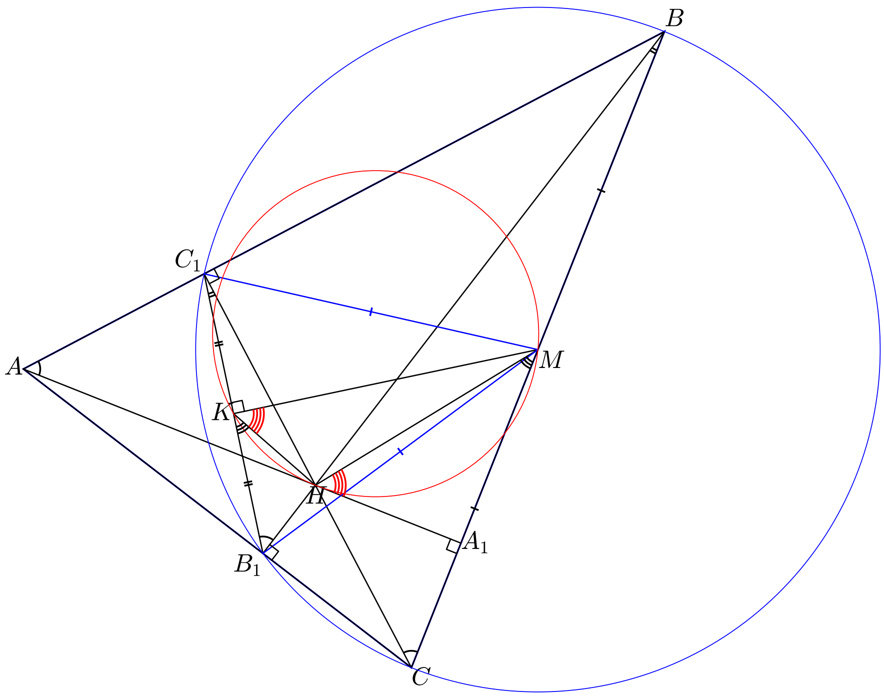
$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i+P_{i+1}} \geqslant \frac{(n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}(P_i+P_{i+1})} > \frac{n-1}{n+2}.$$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Неравенство полностью доказано	$+$	20
Доказано нестрогое неравенство	$+.$	17
Рассмотрена идея использования неравенства между средним арифметическим и среднем гармоническим	$\mp$	6
Неверный переход в доказательстве по индукции	$-$	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-6 Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть M — середина стороны BC, K — середина B_1C_1. Докажите, что окружность, проходящая через K, H и M, касается AA_1.

Решение.

Заметим, что отрезок BC виден под прямым углом из точек B_1 и C_1. Значит, точки B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности с центром в точке M. Поскольку MK является медианой, направленной к основанию равнобедренного треугольника B_1C_1M, она же является высотой.



Заметим, что $\angle BCC_1 = 90^\circ - \angle B = \angle BAH = \angle C_1B_1B$, так как четырёхугольник AB_1HC_1 вписанный ($\angle AC_1H = \angle AB_1H = 90^\circ$). Аналогично $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$. Значит, треугольники BCH и C_1B_1H подобны. Точки K и M являются серединами соответствующих сторон, так что подобны также B_1HK и CHM. Отсюда $\angle B_1KH = \angle CMH$. Тогда $\angle MKH = 90^\circ - \angle HKB_1 = 90^\circ - \angle A_1MH = \angle MAH$. Значит, по свойству касательной прямая AA_1 касается окружности, описанной около MHK.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Показано, что $\angle B_1KH = \angle CMH$ или аналогичное	$\pm$	12
Показано, что $B_1C_1 \perp MK$	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	