НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ
ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Указания по подготовке к Всероссийской олимпиаде школьников «Высшая проба» и список литературы.

Москва – 2021

Олимпиада высшая проба проводится в два тура. Первый имеет единственную цель – отобрать участников, которые допускаются ко второму, результат первого тура, если он привел к проходу на второй, далее никак не учитывается. На первом туре проверяются только ответы.Второй тур является полноценной олимпиадой, как и в любой олимпиаде высокого уровня (и само собой, в науке) на нем проверяются доказательства, сам по себе верный ответ стоит немного. В силу вышесказанного остановимся только на подготовке ко второму туру, при ней подготовка к первому произойдет сама собой.

Опять же, как и любая олимпиада высокого уровня, Высшая Проба требует от участников не столько специфических знаний, сколько умения изобретательно применять и комбинировать распространенные знания. Общего рецепта, как развить в себе такие умения, нет и по видимому не может быть, так что в основном весь следующий текст будет посвящен небольшой части задачи подготовки к олимпиаде, а именно – описанию того небольшого багажа знаний, которые все-таки нужны. Отчасти самостоятельная проверка участником того, что он владеет всем из приведенного списка, и овладение недостающим с помощью хороших книг, окажется также и тренировкой изобретательного применения знаний.

Обратите внимание, что список ниже упоминает только важные для олимпиады темы, находящиеся на границе школьной программы или за ней, подразумевается что основу школьной программы участник и так знает в совершенстве[1].

Итак, от участника Высшей Пробы ожидается следующее (список не исчерпывающий).

- **Общая математическая культура:**
  - Умение формулировать утверждения на языке кванторов, и понимать сформулированные на нем утверждения (например, понимать как перестановка кванторов меняет смысл утверждения, умение строить отрицание к утверждению).
  - Понимание, что является и что не является корректным математическим доказательством.
  - Владение основными приемами доказательств (от противного; индукция, спуск, принцип крайнего; доказательство алгоритмом).
- **Комбинаторика:**
  - Основы перечислительной комбинаторики: правило произведения, числа сочетаний и размещений, биномиальные коэффициенты, метод шаров и перегородок, формула включений-исключений.

[1] Полный перечень тем олимпиады с указанием их содержания можно найти по ссылке

- **Алгебра и теория чисел:**
  - Понятие целого, рационального, действительного и комплексного числа (включая операции над числами, тригонометрическую форму комплексного числа).
  - Основная теорема арифметики (о единственности разложения целого числа в произведение простых) с доказательством. Обратите внимание, это теорема, требующая доказательства, хотя в школьной программе внимание на этом не заостряется. НОК и НОД, алгоритм Евклида и линейное представление НОДа.
  - Деление многочленов с остатком, НОД и НОК многочленов, алгоритм Евклида для многочленов. Важно понимать, почему это тот же самый алгоритм, что и для целых чисел.
  - Основная теорема алгебры (любой многочлен имеет комплексный корень), теорема Безу, сопряженность комплексных чисел (и избавление от иррациональности в знаменателе для иррациональных)
  - Интерполяционная теорема Лагранжа
  - Теорема Виета, выразимость любого симметрического многочлена через элементарные симметрические.
- **Геометрия:**
  - В объеме [3] (+ [4] для 11-классников) или [8] или [7] и для 11-классников добрать стереометрию из любого из первых двух вариантов. Тем кто хочет большего чем необходимый минимум рекомендуем [9] или прорешать геометрию из [19].
- **Математический анализ:**
  - Понятие производной функции и интеграла функции, их алгебраический, геометрический и физический смысл. Умение дифференцировать элементарные функции, интегрировать хотя бы многочлены.

Об источниках для подготовки

Библиотека свободно распространяемой математической литературы МЦНМО: http://ilib.mccme.ru/ и https://www.mccme.ru/free-books/, большинство перечисленных ниже книг доступны бесплатно на этих ресурсах.
База задач на русском языке http://www.problems.ru/, самая большая из существующих на настоящий момент база олимпиадных задач (на английском) https://artofproblemsolving.com/community/c13_contests

Литература

[1] Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки, Киров, 1994

[2] Алфутова Н . Б . Устинов А . В . Алгебра и теория чисел . Сборник задач для математических школ.— М.: МЦНМО, 2002. Доступно http://ilib.mccme.ru/pdf/alfutova.htm

[3] Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, М., МЦНМО, 2006

[4] Прасолов В.В. Задачи по стереометрии, М., МЦНМО, 2010

[5] Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу, М., МЦНМО, 2007

[6] Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика, М. МЦНМО, 2010

[7] Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия, М. МЦНМО, 2008

[8] Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. (c2) 2-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2003, ISBN 5-94057-093-3. Доступно https://www.mccme.ru/free-books/pdf/gordin.pdf

[9] Акопян А. В. Геометрия в картинках (1-е изд.). (c2) М., 2011. Доступно https://www.mccme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf

[10] Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы, М. МЦНМО, 2011

[11] Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии, 2005

[12] Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В., Московские математические олимпиады 1993-2005, М. МЦНМО, 2008

[13] Шарыгин И.Ф. Математика. Решение задач. М., Просвещение, 2007.

[14] Т. И. Голенищева–Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Ященко. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Части I и II, М., МЦНМО, 2010

[15] М. Вялый, В. Подольский, А. Рубцов, Д. Шварц, А. Шень "Лекции по дискретной математике

[16] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки - к профессии / Под общ. ред.: А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М. : МЦНМО, 2018.

[17] Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи, 2011

[18] Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. Выпуск 1 серии "Библиотека математического кружка", изд. 5-е) М., Наука. доступно http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/shk-1.htm

Дополнительная литература

[19] Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы, М. МЦНМО, 2007

[20] Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами. Челябинск, 2005.

[21] Жижилкин И.Д. Инверсия, 2009

[22] Заславский А.А. Геометрические преобразования, 2004

[23] Сергеев И.Н. Зарубежные математические олимпиады. М. Наука, 1987

[24] Толпыго А.К. Девяносто шесть нестандартных задач, 2008

[25] Толпыго А.К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов, 2010

[26] Шаповалов А.В. Принцип узких мест, 2008

[27] Шень А., Игры и стратегии с точки зрения математики, 2008

[28] Н.Я. Виленкин. Рассказы о множествах, 4-е изд., М., МЦНМО, 2007

[29] Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. 4-е изд., доп., М: МЦНМО, 2012

[30] В.И. Арнольд. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов, М., МЦНМО, 2002

[31] Я.П.Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах, М., МЦНМО, 2004

[32] В.В.Прасолов. Многочлены (с2) М.: МЦНМО, 2003. Доступно https://www.mccme.ru/free-books/prasolov/poly.pdf

[33] И.М.Яглом, В.Г.Болтянский. Выпуклые фигуры. Выпуск 4 серии "Библиотека математического кружка" М.-Л., ГТТИ, 1951. доступно http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/4-figures.htm